Session 2007.

Exercice 1 :

On considère les fonctions numériques f et g définies par f(t) = $\frac{1}{t(1+t^2)}$ et g(t)= $-\frac{1}{(1+t)t^2}$

1) Déterminer une primitive de f(t) et de g(t)

$f(t) = \frac{1}{t(1+t^2)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{1+t^2}$ donc $F(t) = \ln t - \arctan t$

et $g(t) = -\frac{1}{(1+t)t^2} = \frac{1}{t} - \frac{1}{t^2} - \frac{1}{t+1}$ donc $G(t) = \ln t + \frac{1}{t} - \ln(t+1)$

2) Donner la valeur exacte du nombre B suivant : B = $\int_1^2 f(t)dt$

$$\int_1^2 f(t)dt = [\ln t - \arctan t]_1^2 = \ln 2 - \arctan 2 + \arctan 1$$

Exercice 2 :

On admet que la variable aléatoire X qui associe à tout composant de type A sa durée de vie, mesurée en heures, suit une loi normale de moyenne m et d'écart type σ.

1) Déterminer m et σ sachant que P(X > 1100) = 0,9332 et P(X ≤ 1600) = 0,8413
2) On suppose désormais que m=1400 et σ=200.
Calculer la probabilité u = P(X > 1200) et commenter le résultat obtenu.

Exercice 3 :

On considère la fonction numérique de la variable réelle x définie par H(x) = $\frac{\exp(x)}{\sqrt{1+x}}$.

Soit (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal.

1) Etudier les variations de H

H est définie sur]-1 ; +∞[, dérivable sur]-1 ; +∞[:

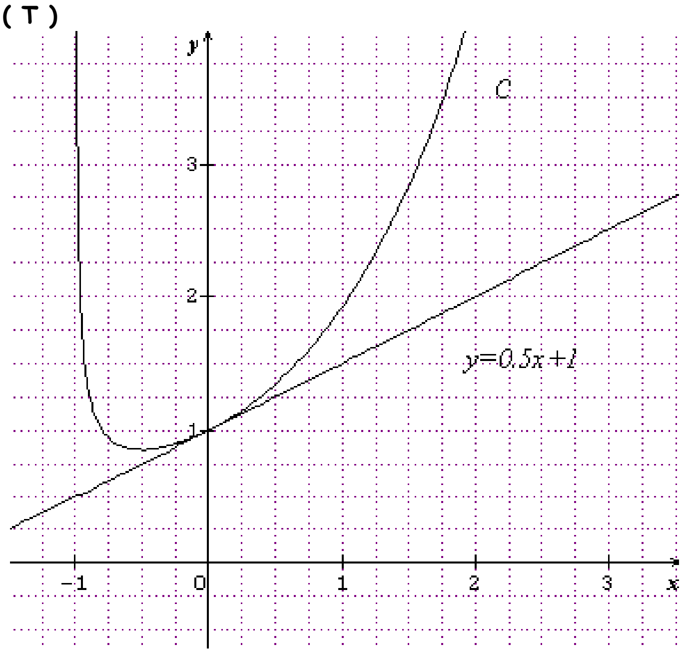
$$H'(x) = \frac{\sqrt{x+1}e^x - e^x\frac{1}{2\sqrt{x+1}}}{(\sqrt{x+1})^2} = \frac{2(1+x)e^x - e^x}{2(1+x)\sqrt{1+x}} = \frac{e^x(1+x)}{2(x+1)\sqrt{1+x}} > 0 \text{ sur }]-1;+\infty[$$

Donc H est strictement croissante sur]-1 ; +∞[,

2) Donner l'équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0.

$y = \frac{1}{2}x + 1$

3) Tracer (C) et (T)



4) Formuler le développement limité d'ordre 2 de la fonction H en 0.

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)$

$\frac{1}{\sqrt{x+1}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + x^2\varepsilon(x)$

donc $H(x) = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + x^2\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$

Exercice 4 :

Résoudre l'équation trigonométrique suivante : $\cos x + \frac{3}{4}\sin x - \frac{5}{4} = 0$

Exercice 5 :

Soit le nombre complexe j = $\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ et les 4 nombres complexes : a = - j² ; b = 2j ; c = - 2j et d = 4/j. Dans le plan complexe, on considère les 4 points A, B, C et D d'affixes respectives a,b,c et d.

1) Calculer Z = $\dfrac{\frac{a-b}{a-c}}{\frac{d-b}{d-c}}$
2) Quelle est la propriété vérifiée par les 4 points A, B, C et D ?

Exercice 6 :

Dans un espace affine E_3 rapporté à un repère orthonormé, soit les deux plans P et P' définis par leurs équations cartésiennes suivantes : P : x – 2z = 0 et P' : 2x – 5y + z – 15 = 0

1) Les plans P et P' sont-ils perpendiculaires ?

Les vecteurs normaux des plans P et P' $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{n'}\begin{pmatrix}2\\-5\\1\end{pmatrix}$ sont orthogonaux. Donc les plans P et P' sont perpendiculaires

2) Calculer la distance du point E(7 ; $2\sqrt{6}$,1) à la droite D=P∩P'

La distance de E à P est $\sqrt{5}$; la distance de E à P' est $2\sqrt{5}$

Grace au théorème de Pythagore, la distance de E à D est 5

3) Déterminer l'équation de la sphère de centre E et tangente à D.

$(x-7)^2+(y-2\sqrt{6})^2+(z-1)^2 = 25$

Session 2008.

Exercice 1 :

Soit les suites (u_n) et (v_n) définies sur les entiers naturels par : $u_0 = 1$; $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + n - 1$ et $v_n = 4u_n - 6n + 15$

1) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique et en déduire l'expression de v_n en fonction de n
2) Prouver que la suite (u_n) peut s'écrire sous la forme d'une somme d'une suite géométrique (T_n) et d'une suite arithmétique (W_n)

Exercice 2 :

Soit la suite des nombres complexes (Z_n) définie par $Z_n = \frac{1-i}{(1+i)^n}$ avec n entier naturel

Quels sont les éléments réels de la suite ?

Exercice 3 :

Soit l'espace vectoriel V rapporté à la base canonique $\vec{i}$ (1 ;0 ;0), $\vec{j}$ (0 ;1 ;0) et $\vec{k}$ (0 ;0 ;1) et $\{\vec{u};\vec{v};\vec{w}\}$ une base quelconque de V.

Montrer que l'on peut construire une base $\{\vec{U};\vec{V};\vec{W}\}$ orthonormée dont le premier vecteur soit colinéaire à $\vec{U}$ et le second dépende de $\vec{U}$ et $\vec{V}$

Application : $\vec{U}$ (2 ;1 ;0) ; $\vec{V}$ (1 ;3 ;-1) ; $\vec{W}$ (3 ;0 ;2)

Exercice 4 :

Donner les solutions réelles de l'équation du second degré suivante : X^2 -2cos(a)X + 1 – sin(a) où a est un paramètre réel avec $0 < a < \frac{\pi}{2}$.

Exercice 5 :

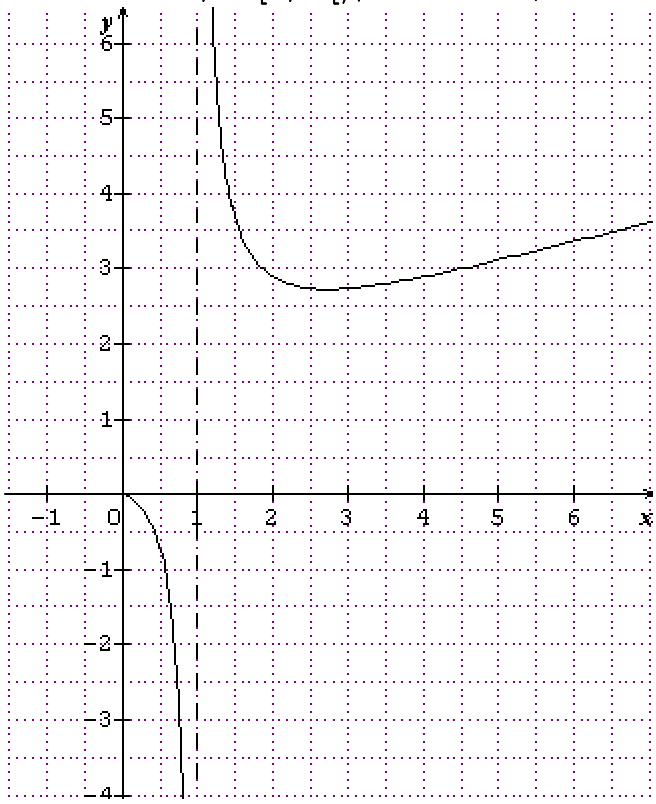
1) **Donner les variations de la fonction numérique de la variable réelle x définie par $f(x) = \frac{x}{\ln x}$.**

   Construire sa courbe dans un repère orthonormé.

La fonction f est définie sur]0 ; 1[$\cup$]1 ; +∞[et $f'(x) = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$

Sur]0 ; 1[$\cup$]1 ; e[, $f'(x) \leq 0$; sur [e ; +∞[, $f'(x) \geq 0$.

Donc sur]0 ; 1[$\cup$]1 ; e[, f est décroissante ; sur [e ; +∞[, f est croissante.



2) A l'aide de la représentation précédente, résoudre l'équation suivante : $a^b = b^a$ avec a et b entiers positifs distincts.

Exercice 6 :
Une urne contient r boules rouges, v boules vertes et b boules blanches.

1) Dans une première expérience, on tire trois boules à la fois. Quelle est la probabilité pour que les trois boules soient de même couleur ?
2) Dans une deuxième expérience, on tire les trois boules l'une après l'autre (tirage effectué avec remise). Quelle est la probabilité pour que les trois boules soient de couleurs différentes ?

Exercice 7 :

Fournir une primitive de chacune des fonctions suivantes : $F(x)=\frac{1}{x\ln x}$; $G(x)=\frac{1}{x(\ln x)^2}$

F est de la forme $\frac{u'}{u}$ de primitive ln(u). Donc une primitive de F est ln(lnx) + k

G est de la forme $\frac{u'}{u^2}$ de primitive $-\frac{1}{u}$. Donc une primitive de G est $-\frac{1}{\ln x}+k$

Session 2009.

Exercice 1 :

Fournir les caractéristiques ainsi que l'équation réduite de la conique suivante : $x^2=\frac{25}{2}\left[y-\frac{6}{10}\right]^2+1$

Exercice 2 :

Soit le nombre complexe Z définie par Z = $\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}$

1) **Déterminer le module et l'argument du nombre complexe Z.**

$|Z|=2\sqrt{2}$; arg (Z) = $\frac{5\pi}{12}$

2) **Déterminer l'ensemble E formé des entiers positifs non nuls n tels que Z^n soit réel.**

Z^n est réel ssi n.arg(Z) = $k\pi$ avec k entier relatif

Ssi n. $\frac{5\pi}{12}=k\pi$

Ssi n = $\frac{12k}{5}$

Comme n doit être entier positifs, on ne prend que les nombres k multiples de 5, donc de la forme 5p.
Et l'ensemble E est formé des entiers positifs de le forme 12p.

3) **Calculer Z^k pour la plus petite des valeurs k de l'ensemble E.**

$Z^{12}=|Z|^{12}\exp(5\pi)=-262144$.

Exercice 3 :
Dans un repère orthonormé, on considère les trois points A, B et C placés sur les trois axes de coordonnées A(1 ;0 ;0), B(0 ;2 ;0), C(0 ;0 ;3)

1) Déterminer les coordonnées d'un vecteur unitaire $\vec{n}$ perpendiculaire au plan (ABC)
2) Calculer l'aire du triangle ABC en utilisant le produit vectoriel
3) Quel est le volume du parallélépipède construit sur AO, AB, AC ?

Exercice 4 :

On fournit l'inégalité de Schwarz suivante :
Soient f et g des fonctions continues sur un intervalle fermé borné [a ;b], b≥a, Alors :

$$\left[\int_a^b f(x)g(x)dx\right]^2 \le \left(\int_a^b [f(x)]^2 dx\right).\left(\int_a^b [g(x)]^2 dx\right)$$

Vérifier l'inégalité de Schwarz sur l'intégrale suivante : $\int_0^1 \exp(-x)dx$

Exercice 5 :

Cet exercice porte sur l'étude de l'évolution de la masse d'un organisme au cours du temps.

1) Etudier les variations de la fonction numérique de la variable réelle positive t : $h(t) = \dfrac{3}{1+2\exp(-2t)}$.
2) Tracer la courbe représentative (*C*) dans un repère orthonormé
3) Déterminer le temps nécessaire pour que la masse initiale double

Exercice 6 :

Combien faut-il de lancers, au minimum, d'une pièce équilibrée afin que la probabilité d'avoir 0 « pile » soit majorée par 2 % ?

Exercice 7 :

Soit la fonction numérique de la variable réelle x définie par : $s(x) = \sqrt{1+\sqrt{1+x}}$

1) Fournir s'(0) en utilisant le développement limité de s à l'ordre 2.
2) Retrouver directement cette valeur.